**专题06函数图象的对称性**

**一、结论**

**已知函数是定义在上的函数.**

**（1）若恒成立,则的图象关于直线对称,特别地,若恒成立,则的图象关于直线对称;**

**最常逆应用：若关于对称：可得到如下结论中任意一个：；**

**周期性与对称性记忆口诀：同号周期，异号对称.**

**（2）若,则的图象关于点对称.**

**特别地,若恒成立,则的图象关于点对称.**

**特别地,若恒成立,则的图象关于点对称.**

**最常逆应用：若关于对称：可得到如下结论中任意一个：**

**二、典型例题**

1．（2021·四川雅安·模拟预测（文））已知函数是定义域为的奇函数，且是偶函数.当时，，则（ ）

A． B． C．8 D．16

**【答案】B**

**【解析】**

**由是偶函数可知对称轴为，故，**

**又函数为奇函数，故，综合（1）（2）得：**

**可得到函数最小正周期为,所以.故选：B**

**【反思】函数的对称性和周期性，奇偶性，往往是紧密结合在一起的，其综合性更丰富考查函数的性质，如本例中对称轴为，可以得到很多结论，比如：，，等，那么在解题时如何取舍呢，选哪个结论能更快的解题？对于这个疑问，需同时兼顾本例中是定义域为的奇函数，可得到，纵观整体，可以看出对于对称轴为得到的结论中选取从而进行快速求出周期.**

2．（2021·全国·模拟预测（文））已知定义在上的奇函数满足，且在区间上是增函数，令，，，则，，的大小关系为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【答案】**

**【解析】**

**是定义在上的奇函数，可得到：①**

**②**

**联立①②得所以关于对称.**

**由于在上递增，所以在递减.**

**，**

**在上递增，所以，**

**所以.**

**故答案为：**

**【反思】函数的对称性和周期性，奇偶性，往往是紧密结合在一起的，其综合性更丰富考查函数的性质，本例中，用数学符号表示出是定义在上的奇函数，通过化简再联立，可得到：这样就得到了：关于对称.这也是周期性，奇偶性，对称性常考的形式.解题时注意利用已知条件，尤其是对称性的逆应用.**

**三、针对训练 举一反三**

1．（2021·黑龙江·哈尔滨市第六中学校二模（理））已知定义域为的函数在单调递减，且，则使得不等式成立的实数的取值范围是（ ）

A． B．或

C．或 D．或

【答案】D

【详解】

解：，则关于对称，

因为在单调递减，

∴在上单调递减，

又

∴，

∴，

∴或，

故选：*D*.

2．（2021·宁夏六盘山高级中学一模（理））已知函数是上的满足，且的图象关于点对称，当时，，则的值为（ ）

A． B． C．0 D．1

【答案】D

【详解】

∵，又关于对称，

∴，

∴的周期为4，

由函数解析式及性质易知，，，，，





故选：D.

3．（2021·全国·二模（理））已知是定义域为的奇函数，，当时，，则时，的解析式为（ ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【详解】

是定义域为的，所以，

因为，所以的一条对称轴方程为，

当时，，

所以当时，，

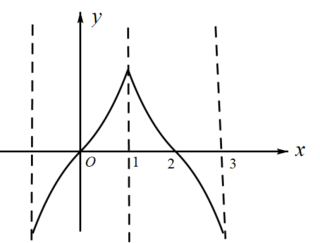
所以，

则时，，

所以，

即.

故选：A.



4．（2021·山东滨州·一模）定义在上的偶函数满足，当时，，设函数（为自然对数的底数），则与的图象所有交点的横坐标之和为（ ）

A．5 B．6 C．7 D．8

【答案】D

【详解】

因为满足，

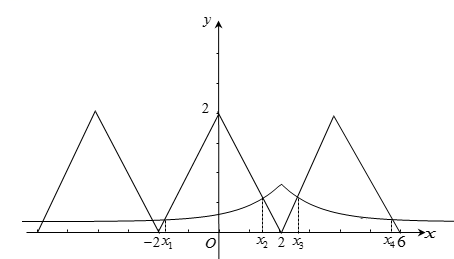
所以图象关于直线对称，

因为是上的偶函数，所以图象关于直线对称，

所以的周期为，

的图象关于直线对称，

由时，，作出图象如图和的图象



由图知与的图象在区间有四个交点，设交点横坐标分别为，

且，，

所以，

所以与的图象所有交点的横坐标之和为，

故选：D

5．（2021·河南·二模（文））已知定义域为**R**的函数在单调递减，且，则使得不等式成立的实数*x*的取值范围是（ ）

A． B．或 C．或 D．

【答案】C

【详解】

，则关于对称，

因为在单调递减，所以在**R**上单调递减，

所以，

由得，

所以，

所以，解得或.

故选：C．

6．（2021·黑龙江肇州·模拟预测（文））已知是定义在上的函数，且对任意都有，若函数的图象关于点对称，且，则（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

令，得，即，所以，

因为函数的图象关于点对称，

所以函数的图象关于点对称，即，

所以，

即，可得，

则，

故选：D.

7．（2021·广西·模拟预测（文））已知是定义在上的奇函数，满足， ，则（ ）

A．0 B． C．2 D．6

【答案】B

【详解】

因为，所以关于直线对称；

又因为是定义在上的奇函数，

所以，，

则，因此，

所以是周期为的函数，因此，；

又关于直线对称，所以；

因此。

故选：B.

8．（2021·全国全国·模拟预测）请写出一个同时满足条件①②③的函数\_\_\_\_\_\_．

①，；②函数的最小值为1；③函数不是二次函数．

【答案】

【详解】

由，可得：函数图象的一条对称轴为直线．

因为函数的最小值为1，且函数不是二次函数，

所以可选取.（答案不唯一）

故答案为：

9．（2021·江西·新余市第一中学模拟预测（文））已知定义在上的奇函数，满足，且当时，，若方程在区间上有四个不同的根，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【详解】

解：，

，

即函数的周期是4，

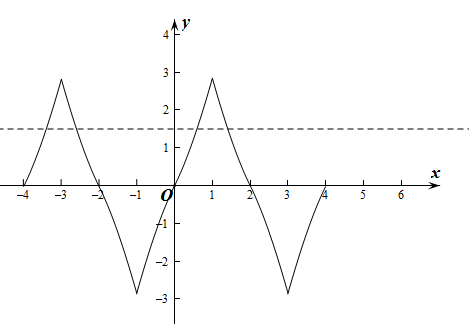
且，

则函数的对称轴为：，是奇函数，

所以也是对称轴，，时，，

函数是增函数，

作出函数的简图如下：



若方程在区间，上

有四个不同的根，，，，

则四个根分别关于和对称，

不妨设，

则，，

则，

故答案为：．

10．（2021·江西上饶·三模（理））已知函数定义域为*R*，满足，且对任意，均有，则不等式解集为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【详解】

因为函数满足，

所以函数关于直线对称，

因为对任意，均有成立，

所以函数在上单调递增*．*

由对称性可知在上单调递减．

因为，即，

所以，即，

解得或*．*

故答案为：